STUDIA SOCJOLOGICZNE 2000, 1-2 (156-157)
ISSN 0039-3371

Jacek Haman
Uniwersytet Warszawski

RACJONALNE METODY PODZIAŁU MANDATÓW W WYBORACH PROPORCJONALNYCH

Proporcjonalne metody podziału mandatów stosowane są w systemach wyborczych wielu krajów demokratycznych, w tym w Polsce. Właściwości metody podziału mandatów mogą mieć dla ostatecznego wyniku wyborów znaczenie porównywalne ze znaczeniem samego rozkładu głosów. Artykuł przedstawia najważniejsze metody alokacji mandatów (metody największych reszt, metodę Jeffersona-d'Hondta, metodę Webstera-Sainte-Laguë i in.), ich uzasadnienie teoretyczne, klasyfikację oraz właściwości. W szczególności, omówionych jest szereg kryteriów racjonalności podziału oraz konsekwencje stosowania poszczególnych metod dla małych i dużych partii.

Główne pojęcia: metody największych reszt, metody dzielnikowe, kwota.

Funkcjonowanie systemu demokratycznego, a ściślej – demokracji przedstawicielskiej – wymaga efektywnego i racjonalnego systemu wyborczego. Elementem systemu wyborczego jest zespół reguł opisujących sposób przeliczania oddanych przez wyborców głosów na mandaty przyznawane poszczególnym partiom i kandydatom. Reguły te mogą mieć wpływ na wynik wyborów niemal równie istotny, jak sam rozkład sympatii politycznych wyborców.

Wybory w roku 1993 przyniosły zdecydowane zwycięstwo lewicy: koalicja SLD–PSL uzyskała łącznie 303 mandaty (prawie 66%). Sukces ten w stosunkowo niewielkim stopniu spowodowany był przesunięciami sympatii wyborców: gdyby w 1993 nie zmieniono ordynacji wyborczej, utrzymując przepisy z 1991 roku, SLD i PSL dysponowałyby zaledwie 173 mandatami (38%), a do osiągnięcia większości rządowej brakowałoby im 57 głosów (Kamiński 1994: 76). To samo zresztą dotyczy wyborów z 1997 roku: gdyby zastosowano ordynację z 1991 roku, koalicja AWS–UW nie byłaby zdolna do utworzenia rządu[1].

Instytut Socjologii, 00-324 Warszawa, ul. Karowa 18, e-mail: jhaman@is.uw.edu.pl

[1] Częściowe (uwzględniające jedynie najważniejsze partie – AWS, SLD, PSL, ROP, UP i obie partie emeryckie) symulacje dają koalicji AWS–UW – przy zastosowaniu reguł z 1991 roku – 236

Poniższy artykuł dotyczy klasyfikacji i właściwości najważniejszych metod alokacji mandatów stosowanych w proporcjonalnych systemach wyborczych. W dalszym ciągu zostanie również przeanalizowana kwestia obciążenia metod podziału mandatów, czyli preferowania przy ich podziale partii dużych lub małych.

Problem proporcjonalnej alokacji mandatów pojawił się w praktyce politycznej w końcu XVIII wieku, z tym, że pierwotnie dotyczyło to rozdziału mandatów nie pomiędzy partie w proporcji do liczby uzyskanych głosów, lecz pomiędzy terytoria w proporcji do liczby mieszkańców – same wybory odbywały się przy zastosowaniu metody większościowej (problem dotyczył podziału mandatów w Izbie Reprezentantów USA pomiędzy stany). W latach 90. XVIII wieku swoje metody opracowali T. Jefferson i A. Hamilton, a w latach 30. XIX wieku D. Webster. W Europie pierwszy semiproporcjonalny parlamentarny system wyborczy stworzył Duńczyk Carl Andrae, został on zastosowany w Danii w roku 1855 i były to pierwsze wybory parlamentarne, o których – chociaż niezbyt ściśle – można mówić jako o wyborach proporcjonalnych. System ten, znany jako STV (*single transferable vote*), dopracował angielski prawnik Thomas Hare w 1857 roku; metoda ta współcześnie przeżywa swój renesans[2]. W 1878 roku Victor d'Hondt stworzył metodę znaną pod jego nazwiskiem; jest ona jednak identyczna z metodą Jeffersona. Metoda Hamiltona znana jest w Europie jako metoda Hare'a-Niemayera. Podobnie metoda opracowana w 1910 roku przez Sainte-Laguë jest identyczna z metodą Webstera. Wybory proporcjonalne w ścisłym znaczeniu tego słowa (tzn. z głosowaniem na listy partyjne) po raz pierwszy przeprowadzono w Szwajcarii (1891), Belgii (1899) i Finlandii (1906).

Początek nowoczesnych naukowych badań właściwości proporcjonalnych metod alokacji mandatów wiązać można z pracami J. Hilla (1911), E. V. Huntingtona (1921, 1928) i W. F. Wilcoxa (1916). Współcześnie do najważniejszych należą prace M. Balinskiego i H. P. Younga (1982, 1994, i in.).

Problemy proporcjonalnych metod wyborczych są obecne także w polskiej literaturze. Można tutaj wymienić pracę A. Żukowskiego (1997), ale problematyka ta jest obecna – w jakimś zakresie – w każdym podręczniku

mandatów, a w przypadku rezygnacji z progu przy podziale miejsc z listy krajowej 232 mandaty, co oznaczałoby utratę większości po opuszczeniu koalicji przez pierwszych 2 posłów (co nastąpiło jeszcze przed powołaniem rządu Buzka). Uwzględnienie przy symulacjach także mniejszych partii prawdopodobnie spowodowałoby, że koalicja AWS–UW nie miałaby większości od początku. Należy tu także zaznaczyć, że symulacje takie nie uwzględniają wpływu kształtu ordynacji na zachowania strategiczne wyborców; ponieważ „efekty mechaniczne" i „psychologiczne" ordynacji idą w tym samym kierunku, więc łączny efekt zmiany ordynacji jest jeszcze silniejszy, niż pokaże to symulacja. Do wykonania symulacji posłużyłem się programem SEATS (patrz Kamiński 1998).

[2] STV nie jest systemem *stricte* proporcjonalnym i jako taki nie jest przedmiotem tego artykułu. Więcej informacji o STV można znaleźć m.in. w: Kamiński 1997; Tideman 1995.

prawa konstytucyjnego – prace te mają charakter głównie prawniczy i same metody alokacji mandatów traktują marginalnie, a kwestie właściwości poszczególnych metod ograniczają w zasadzie do wiedzy potocznej. Znacznie mniej liczne są prace, w których większa uwaga poświęcona jest metodom jako takim – jak w pracach J. Hołubca i J. Mercika (1992), R. Golańskiego i K. Kasprzyka (1998, 1999), niestety także w nich metody są przedstawione głównie od strony samych algorytmów, również bez ściślejszego omówienia ich właściwości. Wyjątek stanowi napisany blisko siedemdziesiąt lat temu *Kalejdoskop matematyczny* H. Steinhausa (1956), w którym kilka stron poświęcone jest oryginalnej analizie metody największych reszt. Należy także wspomnieć o analizach wyborczych, w których poruszany bywał wpływ metody podziału mandatów na ich wynik – wymieńmy tutaj prace M. Kamińskiego (Kamiński 1997; Kamiński i Gryz 1997), S. Gebethnera (1992) i J. Raciborskiego (1997).

Podział mandatów pomiędzy partie a podział mandatów pomiędzy okręgi

Podział mandatów *przed* wyborami pomiędzy okręgi wyborcze, w proporcji do liczby mieszkańców lub uprawnionych do głosowania i podział mandatów pomiędzy partie *po* wyborach – w proporcji do liczby uzyskanych głosów, to niejako dwie strony tego samego problemu. W obu przypadkach stosuje się te same metody i rozwiązywać trzeba takie same trudności. Stąd też kwestię *proporcjonalnego podziału mandatów* rozważać można, tak jak w tym artykule, w kontekście podziału mandatów pomiędzy partie, jak i w kontekście podziału mandatów pomiędzy okręgi wyborcze.

Większość badań, jakie prowadzono nad proporcjonalnym podziałem mandatów, dotyczyła podziału mandatów pomiędzy okręgi wyborcze, chociaż – przynajmniej dla Europejczyków – problem podziału mandatów pomiędzy partie wydaje się bardziej interesujący. W nauce amerykańskiej dominuje problem podziału mandatów pomiędzy okręgi, obecny w praktyce politycznej od roku 1792, podczas gdy pierwsze proporcjonalne wybory parlamentarne przeprowadzono 99 lat później.

Warto jednak zwrócić uwagę na pewne różnice między podziałem mandatów pomiędzy partie, a podziałem mandatów pomiędzy okręgi wyborcze. O ile celem proporcjonalnego podziału mandatów pomiędzy partie jest raczej – ogólnie – zagwarantowanie wszystkim istotnym grupom mniejszościowym adekwatnej reprezentacji parlamentarnej, co nie musi ostatecznie oznaczać reprezentacji *dokładnie* proporcjonalnej do liczby uzyskanych głosów (w systemach większościowych mniejszość może być, w skrajnych przypadkach, pozbawiona jakiejkolwiek reprezentacji), o tyle w przypadku podziału mandatów pomiędzy okręgi zachowanie zasady równości wyborów – „jeden człowiek–jeden głos" – wymaga jak najlepszego odwzorowania rozkładu wielkości (liczby mieszkańców lub uprawnionych do głosowania) poszczególnych okręgów. Stąd też w przypadku podziału mandatów pomiędzy okręgi pierwszorzędne znaczenie ma to, by zastosowana metoda nie była korzystniejsza dla okręgów dużych lub małych. Przy podziale mandatów pomiędzy partie przeciwnie: z reguły zakłada się pewne (w zależności od systemu mniejsze lub większe) uprzywilejowanie dużych partii.

Inną różnicą między rozdziałem mandatów pomiędzy okręgi a rozdziałem mandatów pomiędzy partie jest zasada, że każdy okręg – nawet bardzo mały – musi posiadać pewną minimalną reprezentację (i jest to jedyne dopuszczalne odchylenie od wspomnianej wcześniej zasady równości wyborów). Z tego względu opracowywane były i są omawiane w tym artykule metody przyznające automatycznie każdemu uczestnikowi podziału po co najmniej jednym mandacie. Jest oczywiste, że żadna taka metoda nie miałaby sensu jako metoda podziału mandatów pomiędzy partie.

Problem wyboru metody podziału mandatów pomiędzy okręgi ma istotne znaczenie[3] w przypadku „naturalnych" okręgów wyborczych (stany, województwa, gminy). Jeżeli okręgi wyborcze są wyznaczane specjalnie na użytek wyborów, należy zrobić to w taki sposób, by z góry zminimalizować potencjalne nierówności pomiędzy okręgami; w takim przypadku właściwie każda metoda podziału doprowadzi do takiego samego wyniku.

Metody największych reszt (metody z kwotą *a priori*)

Istotą proporcjonalnego podziału mandatów jest założenie, że jeden mandat powinien przypadać na określoną liczbę głosów – podział mandatów następuje zgodnie z *normą reprezentacji.* Jeśli więc do podziału jest 10 mandatów, oddano 1000 głosów, to przy normie reprezentacji (nazywanej także *kwotą*) równej 100 głosów na jeden mandat partia, która uzyska 300 głosów powinna otrzymać 3 mandaty. Ale ile mandatów powinna otrzymać, gdyby uzyskała 330, 350 lub 360 głosów i dlaczego „norma reprezentacji" wynosić ma akurat 100 głosów na mandat?

Każda metoda proporcjonalnego podziału mandatów musi określać, po pierwsze, w jaki sposób ustala się normę reprezentacji (kwotę) i, po drugie, jak ustalać, ile mandatów należy przyznać partii, która uzyskała liczbę głosów nie

[3] Zmiana jednej metody podziału na inną może oznaczać – w danej sytuacji podziału – utratę przez konkretny okrąg wyborczy mandatu na rzecz innego okręgu i – potencjalnie – przez jedną partię polityczną na rzecz drugiej. W konsekwencji wybór metody podziału może być w znacznym stopniu efektem gry politycznej. Doskonałym tego przykładem jest historia zmian metod podziału mandatów w USA, gdzie, choć w dyskusjach nad wyborem metod stosowano głównie argumenty naukowe, ostateczne decyzje zależały od tego, kto w danym momencie na danej metodzie straci, a kto zyska (por. Balinski i Young 1982).

będącą całkowitą wielokrotnością normy reprezentacji. Te dwa elementy łącznie definiują metodę podziału mandatów.

Najbardziej naturalnym sposobem ustalenia kwoty jest podzielenie liczby oddanych głosów (P) przez liczbę mandatów do podziału (a_0). Uzyskujemy wtedy tzw. *kwotę prostą*, zwaną też *kwotą Hare'a*, $Q_H = P/a_0$.

Rozpatrzmy następujący przykład. Partia A uzyskała 272 głosów, B – 555 głosów, a C – 173 głosów (łącznie $P = 1000$ głosów); do podziału jest $a_0 = 10$ mandatów. Tak więc kwota prosta wynosi $Q_H = 1000/10 = 100$ głosów. Partia A ma zatem $272/100 = 2{,}72$ kwoty, B – 5,55 kwoty, C – 1,73 kwoty. Partia A na pewno powinna otrzymać 2 mandaty, partia B – 5 mandatów, a C – 1 mandat. Pozostaje jednak kwestia przydzielenia dwóch pozostałych mandatów.

Niech a_i oznacza liczbę mandatów przyznaną partii i, zaś p_i liczbę uzyskanych przez partię i głosów, natomiast przez Q oznaczmy normę reprezentacji (w omawianym przykładzie jest to kwota prosta, Q_H). Wyrażenie p_i/Q określa, ile kwot prostych mieści się w liczbie głosów uzyskanych przez partię i. Wartość $|a_i - (p_i/Q)|$ określa wielkość różnicy – obojętne, w którą stronę – pomiędzy rzeczywistą liczbą uzyskanych mandatów a liczbą wynikającą z uwzględnienia liczby kwot, jakie uzyskała dana partia. Średnią wartość wyrażenia $|a_i - (p_i/Q)|$ dla wszystkich partii można traktować jako miarę odległości danego podziału od „idealnego" podziału wynikającego z przyjętej kwoty (normy reprezentacji).

Sposób przydziału mandatów, który minimalizuje średnią wartość wyrażenia $|a_i - (p_i/Q)|$ dla wszystkich partii[4], nazywamy *metodą największych reszt*.

METODA NAJWIĘKSZYCH RESZT. Wyznacz kwotę (normę reprezentacji). – liczbę głosów potrzebnych do uzyskania mandatu. Każdej partii przyznaj tyle mandatów, ile wynosi część całkowita ilorazu liczby uzyskanej przez nią głosów i kwoty. Jeżeli pozostaną jeszcze nierozdzielone mandaty, przyznaj je po jednym kolejno tym partiom, które mają największe reszty z dzielenia liczby głosów przez kwotę.

Powyższa definicja odnosi się tylko do jednego z elementów determinujących metodę podziału mandatów: określa sposób postępowania w przypadku, gdy poszczególne partie uzyskają niecałkowite liczby kwot, nie podaje jednak sposobu wyznaczania kwoty. Stąd też, stosując metodę największych reszt do różnych kwot uzyskujemy różne metody podziału mandatów. Jeżeli jako normę reprezentacji przyjąć kwotę prostą, to uzyskamy metodę opracowaną pierwotnie przez A. Hamiltona (por. Balinski i Young 1982: 10–22), znaną

[4] Jako miarę jakości podziału można by także traktować sumę wyrażeń $|a_i - (p_i/Q)|$, sumę (lub średnią) wyrażeń $(a_i - (p_i/Q))^2$, lub maksymalną – wśród wszystkich partii – wartość wyrażenia $|a_i - (p_i/Q)|$ lub $(a_i - (p_i/Q))^2$. Wszystkie takie miary minimalizowane są przez metodę największych reszt (Birkhoff 1976).

także jako metoda Hare'a-Niemayera. Metoda ta, zwana zwykle po prostu, choć nie w pełni ściśle, „metodą największych reszt", stosowana była między innymi w wyborach do Sejmu w roku 1991.

Wracając do omawianego przykładu, zgodnie z metodą największych reszt dwa pozostałe mandaty należy przyznać partiom A i C, mającym reszty odpowiednio 0,72 i 0,73, nie dostanie natomiast dodatkowego mandatu partia B z resztą 0,55. Ostateczny podział mandatów przedstawia się zatem, jak następuje: partia A – 3 mandaty, partia B – 5 mandatów, partia C – 2 mandaty.

Inny podział uzyskamy, jeżeli jako normę reprezentacji przyjmiemy *wartość kwoty Droopa*[5] $Q_D = \mathrm{Ent}(P/(a_0+1)+1)$, gdzie symbol $\mathrm{Ent}(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x, (zaokrąglenie x w dół). W omawianym przykładzie kwota Droopa wynosi $Q_D = \mathrm{Ent}(1000/(10+1)+1) = 91$ głosów. Przy tak przyjętej normie reprezentacji partia A uzyskuje $272/91 = 2{,}99$ kwoty, partia B – $555/91 = 6{,}09$ kwoty, a partia C – $173/91 = 1{,}90$ kwoty. Ostatecznie partia A uzyska w tym przypadku 3 mandaty, partia B – 6, a partia C – 1; w porównaniu z poprzednim podziałem partia C straciła mandat na rzecz partii B. Należy jednak zadać zasadnicze pytanie: co miałoby uzasadnić zastąpienie kwotą Droopa naturalnej, wręcz oczywistej, kwoty prostej?

Zauważmy, że partia, która osiągnęła kwotę Droopa, tzn. uzyskała $\mathrm{Ent}(P/(a_0+1)+1)$ głosów, *zawsze* uzyska mandat, jeżeli stosowana jest metoda największych reszt z kwotą prostą: wprawdzie nie osiągnęła pełnej kwoty prostej, ale jej reszta zawsze jest wystarczająco duża, żeby zapewnić jej mandat. Wobec tego, partia, która uzyskała co najmniej k kwot Droopa głosów (np. partia B z przykładu, która uzyskała ponad 6 kwot Droopa) mogłaby uzyskać co najmniej k mandatów, dzieląc się na k części, z których każda otrzymałaby po jednej kwocie Droopa głosów; w ten sposób partia B, która, gdy zastosować kwotę prostą, uzyskuje tylko 5 mandatów, podzieliwszy się na 6 części mogłaby sobie zapewnić 6 mandatów (patrz Tabela 1). Jeśli dopuścimy „strategiczne podziały" o liczbie mandatów i tak decydowałaby nie liczba osiągniętych kwot prostych, ale liczba osiągniętych kwot Droopa – co wydaje się wystarczającym uzasadnieniem dla ewentualnego przyjęcia kwoty Droopa jako normy reprezentacji[6].

---

[5] Taką definicję kwoty Droopa, jako najlepiej uzasadnioną teoretycznie, podaję za Taageperą i Shugartem (1989) i Coxem (1997), chociaż większość źródeł podaje wzór $P/(a_0+1)+1$ (np. Żukowski 1997; Tideman 1995 i szereg innych) lub $P/(a_0+1)$ (Newland 1982). Różnice w wartości kwoty Droopa obliczanej według różnych wzorów są bardzo niewielkie, a sytuacja, w której zastosowanie jednego z nich doprowadzi do odmiennego wyniku wyborów niż przy zastosowaniu innego, jest w praktyce niezmiernie mało prawdopodobna.

[6] Zauważmy przy tym, że zastąpienie w metodzie największych reszt kwoty prostej (Hare'a) kwotą Droopa nie zmienia minimalnej liczby głosów gwarantującej uzyskanie mandatu – w dalszym ciągu jest ona równa kwocie Droopa.

Tabela 1. Podział 10 mandatów metodą największych reszt z kwotą prostą (Q_H, *kwota Hare'a*)

	Partia								
	A	B						C	Razem
Liczba głosów	272	555 głosów						1,73	1000
Liczba kwot prostych	2,72	5,55						1,73	
Liczba mandatów	2+1=3	5+0=5						1+1=2	10
Partia Liczba głosów	A 272	B1 92	B2 92	B3 92	B4 93	B5 93	B6 93	C 173	 1000
		razem partie B1–B6: 555 głosów							
Liczba kwot prostych	1,72	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	1,73	
Liczba mandatów	2+0=2	0+1=1	0+1=0	0+1=0	0+1=0	0+1=0	0+1=0	1+1=2	10
		razem partie B1–B6: 6 mandatów							

$Q_H = 1000/10 = 100$

Partia B poprzez „strategiczny podział" może zagwarantować sobie 6 mandatów, dzieląc się na sześć cześci, z których każda przejmuje co najmniej kwotę Droopa (91) głosów. Zauważmy, że uzyskany w ten sposób podział nie jest identyczny z podziałem uzyskanym przy bezpośrednim użyciu kwoty Droopa – w tamtym przypadku partia B zyskiwała mandat kosztem partii C, w tym przypadku partia B zyskuje mandat kosztem partii A.

Własności metod największych reszt

Najważniejsze własności, których należy oczekiwać od racjonalnej metody proporcjonalnego podziału mandatów, związane są z pojęciem monotoniczności.

Monotoniczność ze względu na uporządkowanie partii. Jeżeli w danym głosowaniu partia A uzyskała więcej głosów niż partia B, partia A uzyska nie mniej mandatów niż partia B.

Znaczenie tego warunku jest oczywiste. Jest on spełniony przez każdą metodę największych reszt.

Pełna monotoniczność ze względu na liczbę głosów. Jeżeli dla dwóch różnych głosowań, w których do podziału jest ta sama liczba mandatów i w których oddano łącznie tyle samo głosów, partia A uzyskała w pierwszym z nich więcej głosów niż w drugim, w wyniku pierwszego głosowania otrzyma nie mniej mandatów niż w wyniku drugiego.

Jest to bardzo mocny warunek – w istocie wymaga on, by liczba mandatów zależna była wyłącznie od liczby głosów uzyskanych przez partię A, niezależnie od wyników pozostałych partii. Warunku tego nie spełniają metody największych reszt, jak też żadne inne metody proporcjonalnego podziału mandatów (Steinhaus 1956: 71–74 i Balinski i Young 1982: 106–107).

OGRANICZONA MONOTONICZNOŚĆ ZE WZGLĘDU NA ODSETEK GŁOSÓW. Jeżeli, przy porównaniu dwóch różnych głosowań, w których rozdzielano tyle samo mandatów, istnieje partia, która w drugim głosowaniu uzyskała większy odsetek głosów, ale mniej mandatów niż w pierwszym, to nie ma takiej partii, która by w drugim głosowaniu uzyskała mniejszy odsetek głosów, ale więcej mandatów niż w pierwszym.

Postulat ten wymaga, by, jeżeli partia pomimo uzyskania większego odsetka głosów utraciła mandat, mandat ten nie był przejęty przez partię, która zmniejszyła swój wynik procentowy (a więc, aby w takiej sytuacji mandat został stracony na rzecz partii, która swojego wyniku procentowego co najmniej nie pogorszyła). Warunek ten jest spełniany przez metodę największych reszt (patrz Steinhaus 1956: 71–74).

OGRANICZONA MONOTONICZNOSĆ ZE WZGLĘDU NA LICZBĘ GŁOSÓW (NIEWRAŻLIWOŚĆ NA PARADOKS POPULACJI). Jeżeli, przy porównaniu dwóch różnych głosowań, w których rozdzielano tyle samo mandatów, istnieje partia, która w drugim głosowaniu uzyskała większą liczbę głosów, ale mniej mandatów niż w pierwszym, to nie ma takiej partii, która by w drugim głosowaniu uzyskała mniejszą liczbę głosów, ale więcej mandatów niż w pierwszym (por. Balinski i Young 1982: 68–69 i Young 1994: 60–62).

Jest to mocniejsza wersja poprzedniego postulatu[7]. Niespełnienie go powoduje tzw. paradoks populacji (został on opisany w kontekście wpływu zmian w liczbie mieszkańców na proporcjonalny podział mandatów pomiędzy okręgi). Warunek ten nie jest spełniony przez metodę największych reszt, co pokazuje przykład (Tabela 2) opracowany przez H. P. Younga (1984: 60–61).

Chociaż w drugim głosowaniu partia A uzyskała więcej głosów niż w pierwszym, partia D zaś głosy straciła, to partia A traci w drugim głosowaniu mandat na rzecz partii D. Nie zachodzi tu natomiast sprzeczność z postulatem ograniczonej monotoniczności ze względu na procent głosów: zarówno partia A, jak i D w drugim głosowaniu uzyskują wynik gorszy procentowo (partia A w głosowaniu pierwszym uzyskała 72%, a w drugim 57% głosów, partia D odpowiednio 9% i 7%).

MONOTONICZNOŚĆ ZE WZGLĘDU NA LICZBĘ MANDATÓW DO PODZIAŁU (NIEWRAŻLIWOŚĆ NA PARADOKS ALABAMY). Jeżeli, przy ustalonych liczbach głosów oddanych na poszczególne partie, zwiększy się liczba mandatów do podziału, żadna z partii nie straci z tego powodu mandatu uzyskanego przy mniejszej liczbie dostępnych mandatów (por. Balinski i Young 1982: 38 i nast., Young 1994: 50–52).

[7] Ściślej, jeżeli metoda jest *homogeniczna*, tzn. podział zależy wyłącznie od liczby mandatów oraz od procentowego rozkładu wyników głosowania na poszczególne partie, oraz spełnia warunek ograniczonej monotoniczności ze względu na liczbę głosów, to spełnia również warunek ograniczonej monotoniczności ze względu na procent głosów.

Tabela 2. Paradoks populacji: podział siedmiu mandatów metodą największych reszt z kwotą prostą

Partia	Pierwsze głosowanie			Drugie głosowanie		
	liczba głosów	liczba kwot	liczba mandatów	liczba głosów	liczba kwot	liczba mandatów
A	752	5,013	5+0=5	753	3,984	3+1=4
B	101	0,673	0+1=1	377	1,995	1+1=2
C	99	0,660	0+1=1	96	0,508	0+0=0
D	98	0,653	0+0=0	97	0,513	0+1=1
Razem	1050			1323		

Postulat ten wydaje się oczywisty, ale nie jest spełniany przez metody największych reszt (patrz Tabela 3)[8].

Tabela 3. Podziały za pomocą metody największych reszt z kwotą prostą (Hare'a) dla różnej liczby dostępnych mandatów

Partia		Podział 10 mandatów		Podział 11 mandatów	
	liczba głosów (p_i)	liczba kwot (p_i/1400)	liczba mandatów	liczba kwot (p_i/1273)	liczba mandatów
A	6000	4,29	4+0=4	4,71	4+1=5
B	6000	4,29	4+0=4	4,71	4+1=5
C	2000	1,43	**1+1=2**	1,57	**1+0=1**
Razem	14000	Q_H=14000/10=1400		Q_H=14000/11=1273	

Przyczyną możliwości zajścia takiego paradoksu jest fakt, że zwiększenie liczby dostępnych mandatów silniej wpływa na zwiększenie się liczby kwot partii, która uzyskała więcej głosów niż partii, która uzyskała głosów mniej[9]. Paradoks ten zwany jest *paradoksem Alabamy*, gdyż po raz pierwszy zwrócił na siebie uwagę w toku prac nad podziałem mandatów w Izbie Reprezentantów pomiędzy poszczególne stany USA, gdy okazało się, że zwiększenie liczby miejsc w Izbie z 299 do 300 spowodowałoby zmniejszenie reprezentacji stanu Alabama z 7 do 6 deputowanych.

MONOTONICZNOŚĆ ZE WZGLĘDU NA LICZBĘ PARTII DOPUSZCZONYCH DO PODZIAŁU (NIEWRAŻLIWOŚĆ NA PARADOKS NOWEGO STANU). Jeżeli, przy ustalonych liczbach głosów oddanych na poszczególne partie i ustalonej

[8] Analogiczny przykład można wskazać także dla kwoty Droopa (np. 5500, 5500, 2000, podział 10 i 11 mandatów); można także wskazać przykład, w którym paradoks zachodzi zarówno dla kwoty Hare'a, jak i Droopa (np. 5450, 5450, 1945, podział 10 i 11 mandatów).

[9] W obu przypadkach liczby kwot zmienią się o taki sam procent, jednak w przypadku większej partii oznacza to większy wzrost bezwzględny.

liczbie mandatów do podziału, dopuścimy do udziału w podziale dodatkową partię, żadna z partii dotychczas uwzględnionych w podziale nie zwiększy liczby uzyskanych mandatów (por. Balinski i Young 1982: 43–44). Niespełnienie tego postulatu nosi nazwę *paradoksu nowego stanu*: również ten paradoks został po raz pierwszy opisany, gdy okazało się, że dołączenie nowego stanu (któremu trzeba – kosztem „starych stanów" – przydzielić miejsca w Izbie Reprezentantów) może spowodować, że zyska mandat także któryś ze „starych stanów", pomimo że dostępna dla nich pula uległa zmniejszeniu. W praktyce wyborów proporcjonalnych sytuacja taka może powstać, gdy np. zniesiemy próg wyborczy, wykluczający jakąś partię z podziału.

Do zajścia paradoksu prowadzi ten sam mechanizm, co w przypadku paradoksu Alabamy, tyle że działający w drugą stronę. Dopuszczenie do podziału dodatkowej partii powoduje zwiększenie się łącznej liczby głosów, co powoduje zwiększenie się kwoty, a w konsekwencji proporcjonalne zmniejszenie się liczby kwot uzyskanych przez poszczególne partie. Proporcjonalne zmniejszenie liczby kwot oznacza większą zmianę bezwzględną dla dużych partii, a w konsekwencji możliwość utracenia przez nie mandatów na rzecz którejś z małych partii (patrz Tabela 4)

Tabela 4. Paradoks nowego stanu (podział 10 mandatów, metoda największych reszt z kwotą prostą)

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot	Mandaty	Liczba głosów	Liczba kwot	Mandaty
A	6000	4,62	4+1=5	6000	4,00	4+0=4
B	4950	3,81	3+1=4	4950	3,30	3+0=3
C	2050	1,58	**1+0=1**	2050	1,37	1+0=1
D				2000	1,33	1+0=1
Razem	13000		10	15000		10
Kwota prosta	$Q_H = 13000/10 = 1300$			$Q_H = 15000/10 = 1500$		

Postulaty związane z pojęciem monotoniczności nie są jedynymi pożądanymi własnościami racjonalnych metod proporcjonalnego podziału mandatów.

Jak zostało stwierdzone uprzednio, nie jest możliwa taka metoda podziału, która przydzielałaby każdej partii określoną liczbę mandatów wyłącznie ze względu na jej wynik, nie uwzględniając wyników innych partii. Postulat *zgodności* jest znacznie słabszą wersją tego postulatu: domaga się jedynie tego, by podział mandatów pomiędzy partie należące do jakiegoś podzbioru zbioru partii zależał jedynie od ich wyniku i od liczby dostępnych dla nich mandatów.

ZGODNOŚĆ. Metoda podziału jest *zgodna*, jeżeli dla każdej grupy partii dysponujących łącznie określoną liczbą mandatów podział mandatów pomiędzy te partie jest niezależny od obecności innych partii[10].

Sens tego postulatu łatwo zrozumieć, analizując Tabelę 5, ilustrującą pogwałcenie go przez metodę największych reszt. Przy podziale 10 mandatów pomiędzy partie A i B, partia A uzyskała 7 mandatów, partia B – 3 mandaty. Zgodnie z postulatem zgodności, jeżeli przy podziale w obecności innych partii partie A i B uzyskują łącznie tyle samo mandatów, ile miały do podziału w pierwotnej sytuacji, to również podział tych mandatów pomiędzy nie powinien być taki sam – tak się jednak w przedstawionym przykładzie nie dzieje.

Tabela 5. Pogwałcenie przez metodę największych reszt z kwotą prostą postulatu zgodności

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot	Mandaty
A	370	7,40	7+0=7
B	130	2,60	2+1=3
Razem	500		10
A	370	7,77	7+1=8 A i B razem
B	130	2,73	2+0=2 10
C	230	4,83	4+1=5
D	280	5,88	5+1=6
E	180	3,78	3+1=4
Razem	1190		25

DOKŁADNOŚĆ. Metoda jest *dokładna*, jeżeli, gdy liczby głosów uzyskane przez wszystkie partie są wielokrotnościami kwoty prostej, to każda partia uzyskuje tyle mandatów, ile uzyskała kwot prostych (por. Young 1994: 62).

Metodę podziału, która nie spełniałaby tego postulatu trudno by uznać za metodę proporcjonalną. Jest rzeczą oczywistą, że metoda największych reszt z kwotą prostą spełnia ten postulat (jeśli możliwy jest podział w pełni proporcjonalny, liczby kwot wszystkich partii są liczbami całkowitymi). Łatwo wykazać, że także metoda największych reszt z kwotą Droopa jest metodą dokładną: ponieważ kwota Droopa jest mniejsza od kwoty prostej, partia, która uzyskała dokładnie k kwot prostych uzyska więcej niż k kwot Droopa.

[10] Ściślej: jeżeli w wyniku podziału mandatów partie należące do pewnego podzbioru zbioru partii biorących udział w tym podziale zdobyły łącznie n mandatów, to podział n mandatów za pomocą tej samej metody wyłącznie pomiędzy partie należące do tego podzbioru powinien spowodować przyznanie każdej z tych partii takiej samej liczby mandatów jak w wyniku pierwotnego podziału (por. Young 1994: 57).

TRZYMANIE SIĘ KWOTY. Metoda podziału mandatów trzyma się kwoty, jeżeli żadna partia nigdy nie uzyskuje mniej mandatów niż jej liczba kwot prostych zaokrąglona w dół, ani więcej, niż jej liczba kwot prostych zaokrąglonych w górę.

Postulat ten można rozbić na dwa:

TRZYMANIE SIĘ DOLNEJ KWOTY. Metoda podziału mandatów trzyma się dolnej kwoty, jeżeli żadna partia nigdy nie uzyskuje mniej mandatów, niż jej liczba kwot prostych zaokrąglona w dół.

TRZYMANIE SIĘ GÓRNEJ KWOTY. Metoda podziału mandatów trzyma się górnej kwoty, jeżeli żadna partia nigdy nie uzyskuje więcej mandatów niż jej liczba kwot prostych zaokrąglona w górę.

Postulaty te wychodzą z założenia o „naturalnym" charakterze kwoty prostej jako normy reprezentacji. Metoda największych reszt z kwotą prostą spełnia – co oczywiste – postulat trzymania się kwoty. Metoda największych reszt z kwotą Droopa spełnia postulat trzymania się dolnej kwoty, natomiast może przekraczać kwotę górną (patrz Tabela 6).

Tabela 6. Przekroczenie przez metodę największych reszt z kwotą Droopa kwoty górnej

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot Droopa	Liczba mandatów	Liczba kwot prostych
A	495	5,45	**5+1=6**	**4,95**
B	120	1,32	1+0=1	1,20
C	125	1,38	1+0=1	1,25
D	130	1,43	1+0=1	1,30
E	130	1,43	1+0=1	1,30
Razem	1000		10	
	kwota Droopa $Q_D = 1000/(10+1)+1 = 92$			kwota prosta $Q_H = 1000/10 = 100$

Metody dzielnikowe (metody z kwotą *a posteriori*)

Jeżeli przyjmie się *a priori* określoną wartość normy reprezentacji – na przykład kwotę prostą, to podział najmniej od niej odbiegający uzyskuje się za pomocą metody największych reszt. Zauważmy jednak, że, pomijając kwestię racjonalności takiego podziału, zagrożonego paradoksami w rodzaju paradoksu Alabamy, podziały uzyskane w ten sposób i tak dość znacznie odbiegają od normy reprezentacji. Weźmy pod uwagę następujący przykład (patrz Tabela 7).

Tabela 7. Podział 10 mandatów metodą największych reszt z kwotą prostą

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot	Mandaty	Wartość bezwzględna różnicy pomiędzy liczbą kwot a liczbą mandatów
A	800	8,0	8+0=8	0,00
B	60	0,60	0+1=1	0,40
C	36	0,36	0+1=1	0,64
D	35	0,35	0+0=0	0,35
E	35	0,35	0+0=0	0,35
F	34	0,34	0+0=0	0,34
Razem	1000		10	

Jak widać na przykładzie z Tabeli 7, różnica pomiędzy liczbą kwot osiągniętą przez partię a liczbą przyznanych mandatów osiąga maksymalną wartość 0,64 (dla partii C). Gdyby liczbę mandatów partii C zaokrąglić w dół, to w jej przypadku różnica ta zmniejszyłaby się do 0,36 – wtedy jednak trzeba by dodać mandat innej partii, dla której różnica pomiędzy liczbą kwot a liczbą mandatów wzrosłaby przynajmniej do 0,65.

Można jednak zmienić normę reprezentacji w taki sposób, by zamiast stosować metodę największych reszt móc po prostu zaokrąglić kwotę do najbliższej liczby całkowitej. W takim przypadku różnica pomiędzy liczbą kwot, a liczbą przyznanych mandatów nigdy nie przekroczy 0,5. Metodę opierającą się na takim założeniu opracował jako pierwszy w latach 30. XIX wieku amerykański mąż stanu, Daniel Webster; w Europie znana jest jako metoda Sainte-Laguë.

METODA WEBSTERA-SAINTE-LAGUË. Wyznacz normę reprezentacji. Przyznaj każdej partii tyle mandatów, ile wynosi wartość ilorazu jej liczby głosów i normy reprezentacji zaokrąglona do najbliższej liczby całkowitej[11]. Jeżeli łączna liczba przyznanych mandatów jest zbyt duża, powtórz operację przyjmując większą normę reprezentacji, jeśli jest zbyt mała – powtórz operację stosując mniejszą normę reprezentacji. Podział jest dokonany, jeżeli łączna liczba przyznanych mandatów jest właściwa (Young 1994: 48–49; Balinski i Young 1982: 23–36).

Podany algorytm jest dosyć kłopotliwy, pomimo że z reguły wystarcza najwyżej kilka prób, aby ustalić właściwą wartość normy reprezentacji. W praktyce jednak stosuje się algorytm, który pozwala uzyskać poprawny podział od razu (będzie on opisany w dalszej części artykułu).

[11] W praktyce nieco częściej stosowana jest tzw. zmodyfikowana metoda Sainte-Laguë, w której zaokrąglenie w górę do jedności następuje, gdy liczba kwot osiągnie 0,7 (a nie od 0,5; dalsze zaokrąglenie przeprowadza się już normalnie, tzn. do 3 od wartości 2,5, do 4 od wartości 3,5 itd.). Zmodyfikowana metoda Sainte-Laguë stosowana była w Polsce między innymi w wyborach samorządowych w latach 1990 i 1994 oraz do podziału miejsc na liście krajowej w wyborach do Sejmu w roku 1991.

Tabela 8. Porównanie podziału 10 mandatów za pomocą metody największych reszt z kwotą prostą i pięciu metod dzielnikowych

		Metoda											
		największych reszt z kwotą prostą $Q_H=100$		Webstera-Sainte-Laguë		Jeffersona-d'Hondta		Adamsa		Hilla		Deana	
Partia	liczba głosów	liczba kwot	liczba mandatów	liczba kwot	liczba mandatów[a]	liczba kwot	liczba mandatów[b]	liczba kwot	liczba mandatów[c]	liczba kwot	liczba mandatów[d]	liczba kwot	liczba mandatów[e]
A	800	8,00	8+0=8	8,89	9	10	10	5,00	5	8,00	5	8,00	5
B	60	0,60	0+1=1	0,67	1	0,75	0	0,38	1	0,60	1	0,60	1
C	36	0,36	0+1=1	0,40	0	0,45	0	0,23	1	0,36	1	0,36	1
D	35	0,35	0+0=0	0,39	0	0,44	0	0,22	1	0,35	1	0,35	1
E	35	0,35	0+0=0	0,39	0	0,44	0	0,22	1	0,35	1	0,35	1
F	34	0,34	0+0=0	0,38	0	0,43	0	0,21	1	0,34	1	0,34	1
razem	1000		10		10		10		10		10		

[a] zaokrąglenie liczby kwot do najbliższej liczby całkowitej
[b] zaokrąglenie liczby kwot w dół
[c] zaokrąglenie liczby kwot w górę
[d] zaokrąglenie liczby kwot w dół, jeśli jest mniejsza od średniej geometrycznej dwóch najbliższych liczb całkowitych, a w dół w przeciwnym przypadku
[e] zaokrąglenie liczby kwot w dół, jeśli jest mniejsza od średniej harmonicznej dwóch najbliższych liczb całkowitych, a w dół w przeciwnym przypadku

W przedstawionym przykładzie metody Adamsa, Hilla, i Deana dają taki sam wynik, gdyż metody te przyznają co najmniej jednej mandat każdej partii, która uzyskała co najmniej jeden głos; różnice pomiędzy nimi zachodzą dopiero przy przyznawaniu poszczególnym partiom kolejnych mandatów.

Jak wyglądałby podział Webstera dla przykładu z Tabeli 7? Przyjęcie jako normy reprezentacji wartości kwoty prostej – 100 głosów – spowodowałyby przyznanie 9 – a więc zbyt mało – mandatów. Przyjmijmy więc normę reprezentacji mniejszą, np. 90 głosów[12]. Liczby kwot przy takiej jej wartości przedstawia Tabela 8. Ponieważ suma zaokrągleń kwot wynosi 10 – tyle, ile mieliśmy rozdzielić mandatów – uzyskaliśmy prawidłowy podział metodą Webstera-Sainte-Laguë.

Łatwo wykazać, że metoda Webstera-Sainte-Laguë gwarantuje najmniejszą wartość maksymalnego odchylenia liczby mandatów od liczby kwot, jeżeli dopuścimy swobodne ustalanie normy reprezentacji.

Czy jednak całkowicie dowolne ustalanie wartości normy reprezentacji można uznać za dopuszczalne? Sądzę, że tak. Nawet jeżeli uznamy kwotę prostą za normę reprezentacji – w jakimś sensie – szczególną, nie zmienia to faktu, że rzeczywista norma reprezentacji – a więc rzeczywista liczba głosów na mandat – jest dla każdej partii inna i na ogół od kwoty prostej różna: kwota prosta jest pojęciem czysto teoretycznym. Jeżeli zatem przyjęcie innej normy reprezentacji pozwala na uzyskanie podziału z jakiegoś – uznanego przez nas za istotny – względu lepszego (w tym przypadku charakteryzującego się mniejszymi różnicami w liczbie mandatów na wyborcę pomiędzy poszczególnymi partiami), to odstąpienie od stosowania kwoty prostej wydaje się usprawiedliwione.

Metoda Webstera-Sainte-Laguë zakłada zaokrąglanie liczby kwot do najbliższej liczby całkowitej. Można jednak przyjąć inne zasady postępowania z niecałkowitymi wartościami liczby kwot. Można w szczególności przyjąć, że o liczbie otrzymanych mandatów decydować powinny jedynie pełne kwoty, tzn. liczba mandatów odpowiadać ma zaokrągleniu w dół liczby kwot osiągniętych przez daną partię. Zastosowanie w tym przypadku kwoty prostej prawie zawsze prowadziłoby do rozdzielenia zbyt małej liczby mandatów – zatem norma reprezentacji przy tej metodzie powinna być mniejsza niż kwota prosta. Metoda oparta na zaokrąglaniu kwoty w dół opracowana została przez Thomasa Jeffersona w końcu XVIII wieku i jest to historycznie pierwsza metoda proporcjonalna (metoda największych reszt z kwotą prostą jest o kilka tygodni późniejsza – została opracowana niejako w odpowiedzi na metodę Jeffersona); na grunt europejski zaszczepił metodę Jeffersona belgijski prawnik Victor d'Hondt.

METODA JEFFERSONA-D'HONDTA. Wyznacz normę reprezentacji. Przyznaj każdej partii tyle mandatów, ile wynosi wartość ilorazu jej liczby głosów i normy reprezentacji zaokrąglona w dół do najbliższej liczby całkowitej nie większej od tej wartości. Jeżeli łączna liczba przyznanych mandatów jest

[12] Prawidłowy podział Webstera-Sainte-Laguë można uzyskać stosując dowolną kwotę z pewnego przedziału (w tym przypadku <85,94>), z tym, że niezależnie od tego, jaką konkretnie kwotę się zastosuje, podział jest zawsze taki sam. To samo dotyczy innych, omawianych dalej metod dzielnikowych.

zbyt duża, powtórz operację przyjmując większą normę reprezentacji, jeśli jest zbyt mała – powtórz operację stosując mniejszą normę reprezentacji. Podział jest dokonany, jeżeli łączna liczba przyznanych mandatów jest właściwa (Young 1994: 45–46; por. Balinski i Young 1982: 10–23).

Rozpatrzmy podział 10 mandatów metodą Jeffersona-d'Hondta dla wyników głosowania z Tabeli 7. Przyjęcie jako normy reprezentacji kwoty prostej prowadziłoby do przyznania zaledwie 8 mandatów (dla partii A); podobnie w przypadku normy reprezentacji wynoszącej 90 głosów na mandat – w takim przypadku również rozdzielonych jest jedynie 8 mandatów. Trzeba zatem zastosować kwotę jeszcze mniejszą. Przy normie reprezentacji wynoszącej 80 głosów na mandat podział jest nareszcie prawidłowy – partia A otrzymuje wszystkie 10 mandatów, pozostałe partie nie otrzymują żadnego (Tabela 8).

Metody Webstera-Sainte-Laguë i Jeffersona-d'Hondta stanowią najważniejsze i najczęściej stosowane metody z kwotą *a posteriori*, nie są jednak jedynymi metodami z tej grupy. Można np. przyjąć, że – odwrotnie niż w metodzie Jeffersona – mandat należy przyznawać za każdą rozpoczętą kwotę, a zatem liczba mandatów powinna odpowiadać liczbie kwot zaokrąglonych w górę. W tym przypadku przyjęcie kwoty prostej prowadzi prawie zawsze do przydziału zbyt dużej liczby mandatów – kwota musi być większa. Dla rozpatrywanego przykładu kwota musiałaby należeć do przedziału <160, 200) głosów na mandat (co daje 5 mandatów dla partii A i po jednym dla partii B–F). Jak widać, przy tej metodzie każda partia, która uzyska co najmniej jeden głos musi uzyskać mandat – co w sposób oczywisty dyskwalifikuje ją jako metodę podziału mandatów pomiędzy partie. Można ją jednak rozpatrywać jako metodę podziału mandatów pomiędzy okręgi wyborcze: każdy okręg musi mieć swojego reprezentanta, nawet, jeżeli liczy relatywnie niewielu mieszkańców. Metodę tę (właśnie do podziału mandatów pomiędzy stany) zaproponował w latach 30. XIX wieku John Q. Adams i znana jest pod jego nazwiskiem; nigdy nie była stosowana w praktyce (por. Young 1994: 48; Balinski i Young 1982: 26–28).

Trzymając się zasady zaokrąglania kwoty (w górę lub w dół) można stosować inne tego zaokrąglania zasady niż w przypadku metody Webstera. Zauważmy że wartość 1,5 kwoty („punkt cięcia", od którego partia otrzymuje w metodzie Webstera 2 mandaty, a poniżej którego 1 mandat), choć jest tak samo odległa od 1, jak i od wartości 2 kwot w sensie wartości bezwzględnych, nie jest tak samo odległa w sensie wartości względnych: choć 1,5 jest *o tyle samo* (tzn. o 0,5) większe od 1, o ile 2 jest większe od 1,5, to jednak 1,5 nie jest *tyle samo razy* większe od 1 niż 2 od 1,5 (odpowiednio o 1,5 i o 1,33). Gdyby jednak ustawić „punkt cięcia" na wartości pierwiastka z 2 (około 1,41), to wartość ta jest *tyle samo razy* większa od 1, ile razy 2 jest większe od niej. Można zatem przyjąć metodę, przyznającą dwa mandaty partii, która uzyska co najmniej

1,41 kwot głosów. Punktem cięcia pomiędzy dwoma a trzema mandatami powinien być w takim razie pierwiastek z 6 (ok. 2,45) – jest on 1,22 raza większy od 2 i 1,22 raza mniejszy od 3 – generalnie, liczba kwot powinna być zaokrąglona w górę, jeżeli jest większa bądź równa *średniej geometrycznej* pomiędzy dwoma najbliższymi jej liczbami całkowitymi (tzn. pierwiastkiem kwadratowym z ich iloczynu). Metoda ta, stworzona przez amerykańskiego statystyka Josepha Hilla, a opracowana później przez E. V. Huntingtona, stosowana jest obecnie w USA do podziału mandatów w Izbie Reprezentantów pomiędzy stany w proporcji do ich liczby mieszkańców (Young 1994: 52; Balinski i Young 1982: 48). Podobnie jak w przypadku metody Adamsa, rozwiązanie to przyznaje po jednym mandacie każdej partii (okręgowi), która zdobyła co najmniej jeden głos (ma co najmniej jednego mieszkańca): średnia geometryczna 0 i 1 wynosi 0.

Zmieniając nieco rozumowanie prowadzące do metody Hilla, można wskazać, że różnica pomiędzy 1,5 a 1 (czyli 0,5) stanowi 50% jednej kwoty, podczas gdy różnica pomiędzy 2 a 1,5 stanowi zaledwie 25% dwóch kwot. Jeśli przyjąć, że różnica pomiędzy liczbą kwot w „punkcie cięcia" a liczbą przyznanych mandatów powinna stanowić taką samą część liczby przyznanych mandatów niezależnie od tego, czy liczbę przyznanych mandatów osiągniemy przez zaokrąglenie liczby kwot w górę, czy w dół, to punkt cięcia pomiędzy 2 a 3 mandatami powinien wynosić $1\frac{1}{3}$ kwoty (jedna trzecia stanowi taką samą część jedności, co dwie trzecie dwóch). „Punkt cięcia" pomiędzy dwoma a trzema mandatami należało by ustawić na wartości 2,4 kwoty (0,4 to jedna piąta 2, a 0,6 to jedna piąta 3) i dalej na *średniej harmonicznej* każdych dwóch kolejnych liczb naturalnych[13]. Metoda ta, zaproponowana przez J. Deana, ma, podobnie jak metoda Adamsa, znaczenie wyłącznie teoretyczne (por. Young 1994: 56; Balinski i Young 1982: 29).

Jakkolwiek można by konstruować inne zasady zaokrąglania kwot (i w konsekwencji kolejne metody podziału mandatów), te pięć metod – Webstera, Jeffersona-d'Hondta, Adamsa, Hilla i Deana – łączy się, ze względu na pewne ich szczególne własności[14], w grupę *metod dzielnikowych*,

[13] Pojawia się tutaj formalna trudność w przyznaniu pierwszego mandatu: nie można wyznaczyć średniej harmonicznej 0 i 1. Przez pewne pośrednie rozumowanie można jednak przyjąć, że i w tym przypadku pierwszy „punkt cięcia" powinien wynosić 0, tzn. każda partia (lub okręg) dysponująca co najmniej jednym głosem powinna uzyskać mandat.

[14] Metody te *minimalizują nierówności pomiędzy parami partii*, tzn. gwarantują, że żadne przesunięcie mandatu od jednej do innej partii nie zmniejszy „niesprawiedliwości" wynikających z różnic reprezentacji *per capita*. Nierówności takie można mierzyć na różne sposoby, przy czym nie dla każdego z nich można znaleźć optymalny podział (możliwość pojawienia się cykli). Pięć metod „huntingtonowskich" odpowiada różnym sposobom pomiaru nierówności w reprezentacji *per capita* pomiędzy parami partii. Por. Huntington 1921; Young 1994: 55–57; Balinski i Young 1982: 49 i nast.

nazywanych także *metodami huntingtonowskimi*, od E. V. Huntingtona, który jako pierwszy precyzyjnie opisał ich matematyczne właściwości.

Funkcja priorytetu

Przedstawione uprzednio metody miały na celu rozdzielenie określonej liczby mandatów ze względu na dany wynik wyborów. Możliwe jest jednak inne podejście do problemu podziału: zamiast rozdzielania wszystkich mandatów naraz, można mandaty rozdzielać sekwencyjnie. W takim przypadku metoda powinna wskazać, która partia powinna otrzymać pierwszy dostępny mandat, która drugi, trzeci itd. aż do przydzielenia ostatniego dostępnego mandatu. Inaczej rzecz ujmując, metoda powinna określać, która partia w danej chwili (tzn. po uwzględnieniu już rozdzielonych mandatów) jest najbardziej uprawniona do otrzymania mandatu.

Niech będzie dana funkcja $f(p,a)$, która każdej partii przyporządkowuje pewną liczbę zależną od liczby głosów, które uzyskała ta partia (oznaczanej przez p) i od liczby dotychczas przyznanych mandatów (oznaczaną przez a), rosnąca ze względu na liczbę głosów, a malejąca ze względu na liczbę mandatów. Funkcję taką nazywamy funkcją priorytetu, a jej wartość dla danej partii, która w danej chwili dysponuje już a mandatami, priorytetem tej partii dla uzyskania $a+1$ mandatu. Metoda, w której partia uzyskuje kolejny rozdzielany mandat, jeżeli ma w danej chwili najwyższy spośród wszystkich partii priorytet, jest *metodą opartą na funkcji priorytetu* (por. Young 1984: 57–59, 185).

Rozpatrzmy następujący przykład. Przyjmijmy jako funkcję priorytetu funkcję $f(p,a)= p/(a+1)$, czyli wartość, jaką osiągnęłaby liczba wyborców danej partii przypadających na jednego posła, gdyby to właśnie ta partia otrzymała kolejny mandat. Oznacza to przyznawanie kolejnego mandatu tej partii, która po jego przyznaniu miałaby największą liczbę wyborców na mandat (a więc najgorszą reprezentację *per capita*). Postępowanie takie można łatwo uzasadnić: Partia, która otrzymała mandat ostatnio zawsze jest reprezentowana najlepiej, a zatem ma nieusprawiedliwioną (acz w praktyce nieuniknioną) przewagę nad innymi partiami. Trzymając się takiej metody przydzielania kolejnych mandatów gwarantujemy sobie chociaż to, że przewaga ta będzie możliwie jak najmniejsza.

Tabela 9 zawiera przykład podziału mandatów pomiędzy trzy partie metodą oparta na funkcji priorytetu $f(p,a)= p/(a+1)$.

W momencie przydzielania pierwszego mandatu największy priorytet ma partia A (120) i ona też otrzymuje pierwszy mandat. Drugi otrzymuje partia B, trzeci partia C, czwarty partia A, piąty partia B. W momencie przydzielania szóstego mandatu partia A, która otrzymała już dwa mandaty, ma priorytet 40, partia B, która również ma dwa mandaty, ma wartość priorytetu 28, natomiast

Tabela 9. Wartości priorytetów przy funkcji priorytetu $f(p,a)=p/(a+1)$

Partia	Liczba głosów (n)	Liczba dotychczas otrzymanych mandatów (a)					
		0 $a+1=1$	1 $a+1=2$	2 $a+1=3$	3 $a+1=4$	4 $a+1=5$	5 $a+1=6$
		wartości priorytetu					
A	120	120^{1}	60^{4}	40^{6}	$\mathbf{30^{8}}$	24^{11}	20^{13}
B	84	84^{2}	42^{5}	28^{9}	21^{12}	16,8	14
C	75	75^{3}	$37{,}5^{7}$	25^{10}	18,75	15	12,5

Indeksy górne przy wartościach priorytetów określają, którą pozycję na uporządkowanej liście wartości priorytetów zajmuje dana liczba, a zatem o przyznaniu którego z kolei mandatu decyduje

priorytet partii C, która dostała dotychczas tylko jeden mandat, wynosi 37,5. Ponieważ najwyższy priorytet ma partia A, ona uzyskuje szósty (a swój trzeci) mandat. Mandat siódmy uzyskuje partia C, zaś ostatni, ósmy, partia A. Ostatecznie partia A uzyskała cztery mandaty, a partie B i C po dwa mandaty (na podstawie Tabeli 9 można ustalić, jak wyglądałby podział, gdyby liczba dostępnych mandatów była większa).

Dla tego samego rozkładu głosów przeprowadźmy podział 8 mandatów metodą Jeffersona-d'Hondta stosując jako normę reprezentacji kwotę 30 głosów – odpowiadającą wartości ostatniego, decydującego o przyznaniu 8 mandatu, priorytetu. W takim razie partia A uzyskuje $120/30=4$ kwoty, partia B $84/30=2{,}8$ kwoty, partia C $75/30=2{,}5$ kwoty. Zaokrąglając liczby kwot w dół uzyskujemy liczby mandatów: 4 dla partii A, po 2 dla partii B i C. Łącznie rozdzieliliśmy 8 mandatów, zatem podział jest poprawny. Jest on przy tym identyczny, jak w przypadku podziału opartego na funkcji priorytetu $f(p,a)= p/(a+1)$.

Nie jest to zbieżność przypadkowa – można wykazać, że użycie przy metodzie Jeffersona-d'Hondta jako normy reprezentacji liczby równej wartości priorytetu, która zadecydowała o przyznaniu ostatniego mandatu (wartość ta nazywana jest także *kwotą d'Hondta*, $Q_{d'H}$) zawsze prowadzi do uzyskania prawidłowego podziału, identycznego z uzyskanym za pomocą metody opartej na funkcji priorytetu $f(p,a)= p/(a+1)$ – mamy tu do czynienia z jedną i tą samą metodą[15].

[15] Niech w podziale a_0 mandatów uczestniczy k partii, które uzyskały odpowiednio po p_i ($i=1$ do k) głosów, a partia, która uzyskała p_1 głosów uzyskała ostatni mandat, zdobywając łącznie a_1 mandatów; pozostałe partie zdobyły po a_i ($i=2$ do k) mandatów. Załóżmy, że podział był jednoznaczny (nie było innej partii równie uprawnionej do ostatniego mandatu). Zastosujmy kwotę d'Hondta $Q_{d'H}=p_1/[(a_1-1)+1]= p_1/a_1$ jako normę reprezentacji przy metodzie Jeffersona-d'-Hondta. Liczba kwot osiągniętych przez partię 1 wynosi $p_1/ Q_{d'H} = p_1/(p_1/a_1)= a_1$.

Tożsamość metody Jeffersona-d'Hondta z metodą opartą na funkcji priorytetu $f(p,a) = p/(a+1)$ ma istotne znaczenie praktyczne. Prezentowany uprzednio algorytm na podział metodą Jeffersona-d'Hondta, opierający się na metodzie „prób i błędów" jest mało praktyczny. Wykorzystując funkcję priorytetu można skonstruować algorytm, który da poprawny podział już za pierwszym razem: wystarczy obliczyć priorytety poszczególnych partii dla uzyskiwania kolejnych swoich mandatów i uporządkować je zaczynając od największego. Jeśli do podziału jest a_0 mandatów, przyznajemy każdej partii tyle mandatów, ile „jej" priorytetów znajduje się wśród pierwszych a_0 wartości priorytetów. W ten sposób konstruowane są algorytmy, które można znaleźć potem w ordynacjach wyborczych, jak na przykład ten, pochodzący z art. 110 ordynacji wyborczej do Sejmu z roku 1993:

1) *liczbę głosów oddanych ważnie na każdą z (...) list w okręgu wyborczym dzieli się kolejno przez: 1, 2, 3, 4 i dalej, aż do chwili, gdy z otrzymanych ilorazów da się uszeregować tyle kolejno największych liczb, ile wynosi liczba mandatów do rozdzielenia pomiędzy listy,*
2) *każdej liście przyznaje się tyle mandatów, ile spośród utworzonego w ten sposób szeregu ilorazów przypada jej liczb kolejno największych.*

Nawiasem można dodać, że funkcjonują także inne algorytmy na wyznaczanie podziału Jeffersona-d'Hondta, a ponieważ w znacznej części opracowań dotyczących systemów wyborczych poza przytoczeniem algorytmów nie przeprowadza się żadnej analizy metod podziału mandatów, można w takich książkach (np. Żukowski 1997: 116–118) znaleźć obok siebie opisy – jako odrębnych metod! – „metody d'Hondta", „metody największych średnich" i „metody Hagenbacha-Bishofa".

Oprócz omówionej powyżej funkcji priorytetu $p/(a+1)$ można rozpatrywać także inne funkcje priorytetu. Najbardziej naturalna wydaje się funkcja $f(p,a) = p/a$, nakazująca przydzielić kolejny mandat partii, która w danej chwili jest najgorzej reprezentowana[16]. Analogiczną drogą, jak w przypadku metody

---

Rozpatrzmy liczbę kwot osiągniętych przez partię i ($i \neq 1$). Gdyby była ona większa lub równa niż a_i+1 (czyli $p_i/Q_{d'H} \geqslant a_i+1$), to oznaczało by to, że $p_i/(a_i+1) \geqslant Q_{d'H}$, czyli, że w momencie przydzielania ostatniego mandatu priorytet partii i był co najmniej równy priorytetowi partii 1, co stoi w sprzeczności z przyjętymi uprzednio założeniami. Liczba kwot osiągniętych przez partię i nie może być również mniejsza niż a_i. Gdyby tak się stało, to priorytet partii i w momencie, gdy miała a_i-1 mandatów byłby mniejszy niż priorytet partii 1 w momencie przyznawania ostatniego mandatu, tak że partia i nie miała by już kiedy uzyskać a_i-tego mandatu. Ponieważ jednak partia i uzyskała a_i mandatów, liczba kwot $Q_{d'H}$ osiągniętych przez partię i musi zawierać się w przedziale $< a_i, a_i+1)$, a więc zaokrąglenie tej wartości w dół – a więc liczba przyznanych za pomocą metody Jeffersona-d'Hondta – mandatów musi być również równe a_i.

[16] Pojawia się tutaj pewna trudność: wyznaczenie priorytetu dla partii, która nie uzyskała jeszcze żadnego mandatu (a więc $a=0$) wymaga podzielenia liczby jej głosów przez 0. Trudność tę omińmy w ten sposób, że uznamy, że wartość priorytetu w tym przypadku dąży od nieskończoności (a więc jest większa od każdej skończonej liczby). W pełni poprawne matematycznie rozwiązanie

Jeffersona-d'Hondta można wykazać, że metoda podziału oparta na funkcji priorytetu $p/(a+1)$ jest tożsama z metodą Adamsa.

Można także stosować funkcje priorytetu uwzględniające zarówno poziom reprezentacji *przed* przyznaniem kolejnego mandatu (jak w przypadku metody Adamsa), jak i – jednocześnie – poziom mandatów *po* ewentualnym przyznaniu partii kolejnego mandatu (jak w przypadku metody Jeffersona-d'Hondta).

Stosunkowo najprostsze założenie minimalizacji średniej arytmetycznej reprezentacji *per capita* przed przyznaniem kolejnego mandatu (czyli p/a) i reprezentacji *per capita* po przyznaniu kolejnego mandatu (czyli $p/[a+1]$), prowadzi do dość skomplikowanej funkcji priorytetu $f(p,a)=p\ /\ \frac{a(a+1)}{a+0,5}$; metoda oparta na tej funkcji priorytetu to również jedna z metod dzielnikowych, metoda Deana. Zastąpienie średniej arytmetycznej średnią geometryczną prowadzi do funkcji priorytetu $f(p,a)=p\ /\ \sqrt{a(a+1)}$ i metody Hilla.

Jeżeli natomiast zastosować średnią harmoniczną, uzyskamy funkcję priorytetu $f(p,a)=p/(a+0,5)$ i metodę Webstera-Sainte-Laguë. Aby przy tej funkcji priorytetu wyznaczyć priorytety partii w momencie, gdy uzyskała ona już 0, 1, 2 ... mandatów, należy dzielić jej liczbę głosów przez kolejno 0,5, 1,5, 2,5 itd. Warto zwrócić uwagę, że wartości te odpowiadają kolejnym „punktom cięcia", od których zaokrąglamy liczbę kwot w górę do następnej liczby całkowitej; prawidłowość ta dotyczy wszystkich metod dzielnikowych i odpowiadających im funkcji priorytetu.

Własności metod dzielnikowych

Metody dzielnikowe spełniają wszystkie omówione uprzednio postulaty monotoniczności, z wyjątkiem (niespełnianego przez żadną metodę podziału) postulatu pełnej monotoniczności ze względu na liczbę głosów. Wykażmy w szczególności, że metody dzielnikowe odporne są na paradoks Alabamy, paradoks nowego stanu i paradoks populacji, na które, jak pamiętamy, nie były odporne metody największych reszt.

„Paradoks Alabamy" polega na tym, że w sytuacji, gdy zwiększa się liczba dostępnych mandatów, któraś z partii traci mandat w porównaniu z sytuacją, gdy mandatów do podziału było mniej. Ponieważ metody dzielnikowe opierają się na funkcjach priorytetu, a zatem można przyjąć, że rozdzielają mandaty sekwencyjnie, sytuacja taka w ich przypadku nie jest możliwa: udostępnienie do podziału kolejnego mandatu powoduje, że uzyska go partia z następnym największym priorytetem, nie będzie natomiast miało wpływu na mandaty już rozdzielone (por. Young 1984: 59–60).

---

tego problemu jest oczywiście możliwe i prowadzi do tego samego ostatecznie rezultatu, jest jednak znacznie mniej intuicyjne.

Wnioskowanie to działa także w drugą stronę: skoro w przypadku metod największych reszt możliwy jest paradoks Alabamy, to nie są one oparte na żadnej funkcji priorytetu.

„Paradoks nowego stanu" zachodzi, gdy dopuszczenie do podziału dodatkowej partii (bez zwiększania liczby dostępnych mandatów) powoduje, że któraś ze „starych" partii uzyskuje więcej mandatów. Aby do tego doszło, musiało by się – na skutek włączenia kolejnej partii – zmienić uporządkowanie priorytetów partii „starych". Wartości priorytetów zależą jednak wyłącznie od liczby (a nie procentu!) głosów, które uzyskały poszczególne partie, te zaś się nie zmieniają, tak więc ani wartości, ani tym bardziej uporządkowanie priorytetów „starych" partii nie zmieniają się. Możliwe jest zatem, że wartości priorytetów „nowej" partii wyprzedzą jakieś wartości priorytetów partii starych – i w konsekwencji jakieś „stare" partie mogą utracić mandaty na rzecz partii „nowej", ale nie są możliwe żadne transfery pomiędzy „starymi" partiami.

Trzeci ze wspomnianych paradoksów, „paradoks populacji" ma miejsce, gdy w wyniku dwóch różnych głosowań partia, która utraciła głosy zyskiwała mandat kosztem partii, która zyskała głosy. Na paradoks ten metody największych reszt są podatne, co pokazywała Tabela 2. Metody oparte na funkcji priorytetu – a więc metody dzielnikowe – są na ten paradoks odporne: wraz ze zwiększeniem się liczby głosów rosną także priorytety danej partii, wraz ze zmniejszeniem się liczby głosów – maleją. W efekcie zmiany w uporządkowaniu priorytetów tych dwóch partii mogą się zmieniać wyłącznie na korzyść partii, która zyskała głosy (por. Young 1984: 61).

Dla poprawności powyższego rozumowania konieczne jest, aby metody dzielnikowe spełniały postulat zgodności – niespełniany przez metody największych reszt. Wymaga on, aby, gdy pewna grupa partii otrzymuje łącznie określoną liczbę mandatów, podział ich pomiędzy poszczególne partie był taki sam zarówno wtedy, gdy podział ten był dokonywany jedynie pomiędzy te partie, jak i gdy był to jedynie fragment podziału pomiędzy większą liczbę partii.

Ponieważ przy metodach opartych na funkcji priorytetu podział mandatów w ramach jakiejś grupy partii zależy od wzajemnego uporządkowania ich priorytetów, a na to nie ma wpływu obecność innych partii. Tak więc metody dzielnikowe spełniają także postulat zgodności (por. Young 1984: 59).

Wszystkie metody dzielnikowe spełniają postulat dokładności: jeżeli każda z partii uzyskała liczbę głosów odpowiadającą wielokrotności kwoty prostej, to użycie kwoty prostej jako normy reprezentacji w którejkolwiek z metod dzielnikowych spowoduje zawsze ten sam podział – ponieważ liczba uzyskanych przez każdą partię mandatów będzie liczbą całkowitą, nie będzie potrzebne jakiekolwiek zaokrąglanie i każda partia uzyska dokładnie tyle mandatów, ile uzyskała kwot.

Jedynym z omawianych postulatów spełnianym przez metodę największych reszt z kwotą prostą, a niespełnianym przez metody dzielnikowe jest postulat trzymania się kwoty (przykłady można znaleźć porównując podziały z Tabeli 8). Żadna metoda oparta na funkcji priorytetu, a szerzej – żadna metoda monotoniczna ze względu na uporządkowanie partii i odporna na paradoks populacji – nie może trzymać się kwoty: postulaty te są wzajemnie sprzeczne[17].

Możliwe jest natomiast gwarantowanie kwoty górnej lub dolnej: metoda Jeffersona-d'Hondta gwarantuje trzymanie się kwoty dolnej, tzn. partia, która osiągnęła k kwot prostych, uzyska co najmniej k mandatów, natomiast metoda Adamsa gwarantuje trzymanie się kwoty górnej, tzn. że partia, która uzyskała mniej niż k kwot prostych, nie otrzyma więcej niż k mandatów. Metody Webstera-Sainte-Laguë, Hilla i Deana mogą prowadzić do przekroczenia tak kwoty górnej, jak i dolnej, z tym, że w praktyce przekroczenie kwoty dolnej przez metodę Webstera-Sainte-Laguë zdarza się niezmiernie rzadko[18].

Wpływ wielkości partii na wynik podziału

To, że pewne metody podziału mandatów są korzystne dla partii dużych, a inne korzystniejsze dla małych, należy do najszerzej rozpowszechnionej potocznej wiedzy o właściwościach metod alokacji mandatów. I tak, o metodzie Jeffersona-d'Hondta mówi się, że jest korzystna dla partii dużych, a co do metody największych reszt z kwotą prostą obecne są dwie opinie: bądź, że jest korzystna dla partii małych, bądź też, że jest neutralna. Sam fakt istnienia w tej ostatniej sprawie dwóch różnych zdań pokazuje, że problem ten nie jest taki prosty; co więcej – jak zaraz zobaczymy – w ogóle nie musi mieć jednoznacznego rozwiązania.

Nawet jeśli przyjąć, że określenie „metoda korzystna dla dużych (małych) partii" jest intuicyjnie zrozumiałe, to w kontekście badawczym wymaga ono jednak ściślejszej operacjonalizacji. Miarą „korzystności" metody dla danej partii jest stosunek przyznanej jej liczby mandatów i liczby osiągniętych przez nią kwot prostych, $k_i = a_i / \frac{p_i}{Q_H}$: jeśli $k_i > 1$, metoda była dla partii i korzystna, jeśli $k_i < 1$ – niekorzystna. Można zatem uznać, że metoda korzystna dla dużych partii to taka, dla której współczynnik korelacji pomiędzy k_i a p_i jest do-

---

[17] Por. Young 1984: 60–61. Dowód może polegać na wykazaniu, że dla dwóch głosowań o wynikach przedstawionych w Tabeli 2 podziały muszą prowadzić albo do naruszenia postulatu monotoniczności ze względu na uporządkowanie partii, albo do paradoksu populacji, albo do przekroczenia kwoty.

[18] Por. Balinski i Young 1982: 81. Podają oni, że prawdopodobieństwo, aby metoda Webstera naruszyła kwotę przy podziale mandatów w Izbie Reprezentantów pomiędzy stany USA wynosi 1/1600.

datni, a korzystna dla małych partii – gdy jest ujemny. Inny sposób (Young 1984: 54), zakłada, że metody „korzystne dla dużych partii" charakteryzują się wyższą średnią wartością k_i w klasie „partii dużych" niż w klasach „partii małych" i „partii średnich", przy czym klasy te wyznacza się dzieląc, ze względu na liczbę uzyskiwanych głosów, populację partii na trzy równoliczne kategorie.

Pozostaje jednak kwestia określenia, na jakiej „populacji wyborów" miałyby być przeprowadzone takie analizy. Zauważmy, że w pewnych sytuacjach metody, uważane za korzystne dla partii dużych mogą dać podział korzystniejszy dla partii mniejszej i odwrotnie – metoda uważana za uprzywilejowującą partie małe może dać wynik korzystny dla partii dużej. Jak pokazuje Tabela 10, metoda d'Hondta, uważana za najkorzystniejszą dla dużych partii, może dać podział, w wyniku którego partia mniejsza będzie lepiej reprezentowana niż partia większa. Z kolei Tabela 11 pokazuje podział metodą Adamsa – najkorzystniejszą dla partii małych – w którym lepszą reprezentację *per capita* uzyskuje partia większa. Zatem to, że jakaś metoda jest korzystniejsza dla partii dużych niż dla małych oznacza nie tyle, że *zawsze* jest korzystniejsza, ile raczej, że *na ogół* jest korzystniejsza. Wyjaśnienie, co oznacza sformułowanie „na ogół", wymaga z kolei odwołania się do rozkładu prawdopodobieństwa uzyskania różnych – korzystnych dla partii dużych lub małych – wyników.

Tabela 10. Podział metodą Jeffersona-d'Hondta: wynik korzystny dla mniejszej partii (kwota 550, dwa mandaty do podziału)

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot	Liczba mandatów	Liczba wyborców na jeden mandat
A	1000	1,82	1	1000
D	550	1,00	1	550

Tabela 11. Podział metodą Adamsa: wynik korzystny dla większej partii (kwota 600, trzy mandaty do podziału)

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot	Liczba mandatów	Liczba wyborców na jeden mandat
A	1000	1,67	2	500
B	550	0,92	1	550

Są dwa podejścia do określenia „populacji wyborów", której analizowanie miałoby pozwolić na określenie, które metody są korzystne dla dużych, a które dla małych partii. Pierwsze podejście – empiryczne – zakłada analizowanie konkretnych historycznych sytuacji podziału (np. seria wyników wyborów w jakimś kraju w długim okresie czasu).

W drugim podejściu zamiast historycznych wyników głosowań przyjmuje się pewne teoretyczne rozkłady prawdopodobieństwa na wynikach wyborów. Jest to o tyle trudne, że w sposób oczywisty różne wyniki głosowania nie są tak samo prawdopodobne, a co więcej – to, jakie wyniki wyborów są bardziej prawdopodobne od innych, należy do charakterystyki różnych systemów politycznych i partyjnych. Pomimo tych trudności wypracowano pewne metody analizy problemu obciążenia metod podziału mandatu oparte na teoretycznych rozkładach prawdopodobieństwa na wynikach wyborów. Z drugiej strony, założenia o rozkładzie prawdopodobieństwa są często ukryte w metodach, które się do nich pozornie nie odwołują[19].

Zatrzymajmy się jeszcze na chwilę przy metodzie największych reszt z kwotą prostą. Aby zawyżyć reprezentację małych partii, partie małe musiałyby mieć większe reszty niż partie duże. Większość analiz teoretycznych zakłada jednak, że wielkość reszty nie jest zależna od wielkości partii. Jest to założenie o tyle rozsądne, że wielkość reszty wraz ze zwiększaniem się liczby uzyskanych głosów zmienia się cyklicznie – rośnie do momentu osiągnięcia pełnej kwoty, po czym spada do zera i znowu rośnie aż do uzyskania kolejnej pełnej kwoty itd. W praktyce więc niewielkie różnice w liczbie uzyskanych głosów mogą oznaczać znaczącą różnicę w wielkości reszty. Wyobraźmy sobie jednak sytuację, w której metoda największych reszt stosowana jest w okręgach liczących po około 20 mandatów (a więc pełna kwota odpowiada mniej więcej 5% głosów). W przypadku partii liczących na kilkanaście – kilkadziesiąt procent głosów reszty mogą być zarówno bliskie zera, jak i jedności – można więc zapewne założyć, że wartość oczekiwana reszty wynosi 0,5. Załóżmy jednak, że znaczna część wyborców głosuje na partie uzyskujące po około 3–5% głosów. Partie te z reguły nie osiągną ani jednej pełnej kwoty, natomiast ich reszty będą oscylowały pomiędzy wartościami 0,6–1. W efekcie więc partie małe częściej niż partie duże będą osiągały kwoty upoważniające do uzyskania dodatkowych mandatów, a ostateczny podział będzie korzystniejszy dla partii małych.

Zauważmy tutaj dwie prawidłowości. Po pierwsze, opisana struktura systemu partyjnego i system wyborczy odpowiada mniej więcej sytuacji w Polsce w roku 1991. W *takiej* sytuacji metoda największych reszt może prowadzić do regularnego nadreprezentowywania partii małych. W systemie, w którym wszystkie istotne partie mają poparcie rzędu kilkunastu – kilkudziesięciu procent głosów, ta sama metoda prawdopodobnie okazałaby się neutralna. Po drugie, gdyby w opisanej sytuacji utrzymać – inaczej, niż miało to miejsce w Polsce – niezmieniony system wyborczy, to również struktura partyjna

[19] Szereg metod badania obciążenia na podstawie teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa podają: Balinski i Young 1982: 118–128.

uległaby konserwacji: po prostu małym partiom nie opłacało by się jednoczyć, gdyż startując do wyborów osobno uzyskiwałyby razem więcej mandatów, niż gdyby zgłaszały wspólną listę.

Problem obciążenia metod podziału mandatów można analizować także bez odwoływania się do tak empirycznych, jak i teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa na wynikach wyborów. Prowadzi to oczywiście do wniosków innego rodzaju niż konstatacje osiągane przy obu poprzednich podejściach. Z tego nurtu badań zaprezentuję tutaj dwa ujęcia: odwołujące się do pojęć super- i subaddytywności, oraz analizy wzajemnych relacji pomiędzy różnymi metodami podziału.

SUPERADDYTYWNOŚĆ METODY PODZIAŁU MANDATÓW. Metoda podziału mandatów jest *superaddytywna*, jeżeli koalicja dwóch partii uzyskuje zawsze nie mniej mandatów niż partie te łącznie uzyskałyby startując osobno, przy założeniu, że koalicja uzyskała tyle samo głosów, ile uzyskałyby wchodzące w jej skład partie startując osobno, a inne warunki nie ulegają zmianie.

Metody superaddytywne są korzystne dla partii dużych, w tym sensie, że duża partia ma zagwarantowany wynik nie gorszy, niż osiągnęłyby dwie małe partie powstałe z jej rozpadu, co nie oznacza, że w każdym przypadku mniejsza partia będzie gorzej reprezentowana (*per capita*) niż partia duża. Analogicznie można zdefiniować metody subaddytywne, korzystne dla partii małych.

Jedyną, spośród omawianych w tym artykule, metodą superaddytywną jest metoda Jeffersona-d'Hondta (Balinski i Young 1982: 91); jedyną subaddytywną (z pewnymi zastrzeżeniami) – metoda Adamsa.

Oprócz badania bezwzględnego obciążenia metod, a zatem oceny, czy konkretna metoda jest korzystna dla partii małych lub dużych, można analizować relacje pomiędzy metodami: która z dwóch metod jest korzystniejsza dla dużych (małych) partii.

Metoda M_1 jest nie mniej korzystna dla dużych partii niż metoda M_2 wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym rozdziale takiej samej liczby mandatów przy takich samych wynikach głosowania metoda M_1 przyzna partii A więcej mandatów niż metoda M_2, a partii B mniej mandatów niż metoda M_2 tylko wtedy, gdy partia A uzyskała więcej głosów niż partia B (por. Balinski i Young 1982: 118).

Można wykazać, że metoda Jeffersona-d'Hondta jest nie mniej korzystna dla dużych partii niż metoda Webstera-Sainte-Laguë, która z kolei jest nie mniej korzystna dla dużych partii niż metoda Hilla, która z kolei jest nie mniej korzystna dla dużych partii niż metoda Deana, która jest nie mniej korzystna dla dużych partii niż metoda Adamsa (ponieważ relacja ta jest przechodnia, metoda Jeffersona-d'Hondta jest nie mniej korzystna dla dużych partii niż metoda Hilla itd.). Zastępując zwrot „jest nie mniej korzystna dla dużych partii" symbolem „$\geqslant$" można zapisaćw skrócie (por. Balinski i Young 1982: 118–119):

Jeffersona-d'Hondta $\geqslant$ Webstera $\geqslant$ Hilla $\geqslant$ Deana $\geqslant$ Adamsa

Można wskazać także drugi szereg:

Jeffersona-d'Hondta $\geqslant$ najw. reszt z kwotą Droopa $\geqslant$ najw. reszt z kwotą prostą $\geqslant$ Adamsa

W dowodzie wykorzystuje się fakt, że zmniejszenie normy reprezentacji korzystniejsze jest dla większych partii (proporcjonalne zwiększenie liczby kwot powoduje dla partii, która uzyskała ich więcej, większą bezwzględną zmianę, a w konsekwencji większe szanse na przekroczenie kolejnych progów uprawniających do uzyskania następnych mandatów).

Znaczenie innych elementów systemu wyborczego

Metoda podziału mandatów, taka jak jedna z opisanych wyżej, jest jedynie elementem kompletnego algorytmu podziału mandatów, który musi być elementem każdej ordynacji wyborczej. O ostatecznym podziale mandatów decydują także podział kraju na okręgi, stosowanie progów wyborczych i ich wysokość, a także, bardzo rzadko w praktyce stosowane, ale niezbędne dla kompletności ordynacji wyborczej, zasady rozstrzygania w wypadku „remisu", gdy do otrzymania jakiegoś mandatu w równym stopniu uprawnione są dwie partie.

Opisane w poprzednich rozdziałach właściwości metod podziału mandatów dotyczą podziału w ramach jednego okręgu i w zasadzie nie przenoszą się na poziom podziału mandatów w skali całego kraju (chyba, że tak jak w przypadku Holandii lub Izraela cały kraj jest jednym okręgiem wyborczym). Chociaż wszystkie opisane metody są – w skali okręgu – monotoniczne ze względu na uporządkowanie partii, tzn. partia, która otrzymała (w danym okręgu) więcej głosów niż inna partia nie może otrzymać (w danym okręgu) mniej mandatów, to żadna z nich nie może zagwarantować tego na poziomie kraju. I tak np. w wyborach samorządowych w 1998 roku (metoda d'Hondta) w Poznaniu, AWS z wynikiem 34,6% głosów uzyskał 24 miejsca w Radzie Miasta, SLD zaś, które uzyskało ponad 2% głosów mniej (32,2%) uzyskało o jedno miejsce więcej.

Im mniejsza jest liczba mandatów rozdzielanych w danym okręgu, tym większe – z konieczności – są odchylenia od ścisłej proporcjonalności. W konsekwencji, jeżeli metoda jest obciążona na korzyść małych lub dużych partii, w przypadku małych okręgów ma to znacznie większy wpływ na kształt ostatecznego podziału (w skali okręgu, ale przede wszystkim w skali całego kraju) niż przy dużych okręgach wyborczych – tak więc, jeżeli metoda jest obciążona na korzyść dużych partii, podział kraju na małe okręgi jest korzystny dla partii dużych, jeżeli zaś metoda byłaby obciążona na rzecz partii małych, podzielenie kraju na małe okręgi jest – w pewnych granicach – korzystne dla partii małych. Z drugiej strony stosowanie bardzo małych okręgów jest zawsze niekorzystne dla małych partii: jeśli okręg liczy np. 3 mandaty, to nawet przy metodzie silnie preferującej małe partie, jak metoda Adamsa, tylko trzy największe zdobędą miejsce w parlamencie.

Progi wyborcze są elementem bardzo wielu proporcjonalnych systemów wyborczych, niedopuszczającym do partycypacji w podziale mandatów partii, które w skali kraju zdobyły mniej niż określony procent głosów. Stosowanie progów wyborczych jest zasadniczo czynnikiem niekorzystnym – z oczywistych względów – dla partii najmniejszych, korzystnym natomiast dla partii, które próg przekraczają – pozostaje dla nich więcej mandatów do podziału.

Zwróćmy jednak uwagę, że stosowanie progu wyborczego w połączeniu z metodą największych reszt jest szczególnie korzystne dla partii dużych – mechanizm jest tu ten sam, co w przypadku „paradoksu nowego stanu". Nieuwzględnianie przy wyznaczaniu kwoty prostej (lub kwoty Droopa) głosów, oddanych na partie, które nie przekroczyły progu, powoduje wyznaczenie mniejszej kwoty, co, jak wspomnieliśmy, jest zawsze korzystne dla dużych partii. W praktyce stosowanie progu wyborczego w połączeniu z metodą największych reszt może prowadzić do „paradoksu donacji", gdy przekazanie przez jedną partię części głosów innej spowodowało by, że partia oddająca głosy uzyskuje *więcej* mandatów – pokazuje to Tabela 12 (nieznacznie zmodyfikowany przykład z Tabeli 4).

Tabela 12. Paradoks donacji (podział 10 mandatów, metoda największych reszt z kwotą prostą z progiem 2000 głosów)

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot	Mandaty	Liczba głosów	Liczba kwot	Mandaty
A	6000 (40%)	4,61	4+1=5	6000	4,00	4+0=4
B	4950 (33%)	3,81	3+1=4	4950	3,30	3+0=3
C	2055	1,58	**1+0=1**	2050	1,37	**1+1=2**
D	1995 – nie osiągnęła progu			2000	1,33	1+0=1
Razem	13005 bez partii D 15000 łącznie z partią D		10	15000		10
kwota prosta	$Q_H=13005/10=1300,5$			$Q_H=15000/10=1500$		

Jeśli próg wyborczy dopuszcza do podziału partie, które uzyskały co najmniej 2000 (lub 13,33%) głosów, partii C opłacałoby się „przekazać" 5 głosów partii D – w takiej sytuacji pomimo utraty głosów partia C uzyskałaby o jeden mandat więcej.

Ordynacja wyborcza musi uwzględniać sytuacje, gdy metoda podziału mandatów nie generuje jednoznacznego podziału, gdyż dwie partie mają „takie samo prawo" do tego samego mandatu (mają identyczne wartości reszt lub takie same priorytety w momencie przyznawania ostatniego mandatu). Wyobraźmy sobie chociażby sytuację, gdy o trzy mandaty ubiegają się dwie partie, które uzyskały tyle samo głosów: żadna metoda, która odwołuje się tylko do liczby uzyskanych głosów, nie umiałaby wskazać, która z nich powinna otrzymać trzeci mandat. Ordynacja wyborcza musi zawierać algorytm postępowania w takiej sytuacji. I tak np. ordynacja do sejmu z 1993 roku każe w sytuacji niejednoznacznego podziału przyznać mandat tej partii, która uzyskała więcej głosów, a jeżeli obie partie dostały głosów tyle samo – tej, która uzyskała więcej głosów w większości obwodów głosowania (*Ordynacja wyborcza do Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej*, art. 110 pkt 2, Dz. U. nr 45/1993). Ponieważ jednak przy każdym kryterium obie partie mogą uzyskać taki sam wynik, ostateczną – gdy inne nie przyniosą rezultatu – metodą rozstrzygania zawsze powinno pozostać losowanie[20].

Podsumowanie

Spośród omówionych w tym artykule metod w praktyce zastosowanie w wyborach proporcjonalnych może znaleźć metoda największych reszt (z kwotą prostą lub Droopa), a z metod dzielnikowych – Jeffersona-d'Hondta i Webstera-Sainte-Laguë. Metod Hilla, Deana i Adamsa w ich klasycznej postaci do podziału mandatów zastosować się nie da, gdyż zakładają przyznanie mandatu każdej partii, która uzyskała co najmniej jeden głos (nie wyklucza to jednak ich użycia jako metody podziału mandatów pomiędzy okręgi wyborcze); można by jednak wprowadzić do nich modyfikację podwyższającą próg niezbędny do uzyskania pierwszego mandatu, tak samo jak w przypadku modyfikowanej metody Sainte-Laguë.

Metody największych reszt nie spełniają szeregu istotnych kryteriów racjonalności (wrażliwość na „paradoks Alabamy", „paradoks populacji" i „paradoks nowego stanu", niezgodność). Wad tych nie mają metody dzielnikowe.

Jedynym kryterium spełnianym przez metodę największych reszt z kwotą prostą a niespełnianym przez metody dzielnikowe jest trzymanie się kwoty. Należy jednak pamiętać, że trzymanie się kwoty zawsze jest okupione wrażli-

[20] Nb. obecna ordynacja wyborcza do Sejmu nie uwzględnia losowania jako ostatecznej instancji, a w przypadku podziału mandatów z listy krajowej w ogóle nie określa sposobu postępowania w razie niejednoznacznego podziału. Może więc, teoretycznie, dojść do sytuacji, że nie da się jednoznacznie określić wyniku wyborów do Sejmu – co musiałoby prowadzić do głębokiego kryzysu konstytucyjnego.

wością na paradoks populacji, a z drugiej strony, trudno uznać, że jest to istotnie tak cenna właściwość. Czy dla danych pokazanych w Tabeli 13 trzymanie się kwoty należy uznać za zasadne?

Tabela 13. Podział 10 mandatów, metoda największej reszt z kwotą prostą

Partia	Liczba głosów	Liczba kwot	Liczba mandatów	Liczba wyborców na jeden mandat
A	400	8,00	8+0=8	50
B_1	2	0,04	0+1=1	2
B_2	2	0,04	0+1=1	2
C_1 do C_{96}	po 1	0,02	0+0=0	–
Razem	500	500		

kwota prosta $Q_H=500/10=50$

Zastosowanie metody trzymającej się kwoty prowadzi do ogromnej nadreprezentacji partii B_1 i B_2, dla których liczba wyborców wypadająca na jeden mandat jest 25 razy mniejsza od kwoty. Gdyby jednak (jak nakazywałyby zarówno metoda Jeffersona-d'Hondta, jak i Webstera-Sainte-Laguë) przyznać wszystkie 10 mandatów partii A, ta byłaby wprawdzie nadreprezentowana, ale liczba 40 wyborców na jeden mandat to zaledwie 1,25 razy mniej niż wynosi kwota prosta.

Należy zatem przyjąć, że, biorąc pod uwagę właściwości metod, w tym spełniane przez nie kryteria racjonalności, jedynymi kwalifikującymi się do zastosowania do podziału mandatów w wyborach są metody Jeffersona-d'Hondta i Webstera-Sainte-Laguë. Z tych dwóch jedynie metoda Jeffersona-d-'Hondta spełnia dodatkowe dwa istotne kryteria: jest superaddytywna i gwarantuje dolną kwotę. Wiąże się to z pewnym obciążeniem tej metody na korzyść partii większych – jest to jednak cecha w pewnym zakresie pożądana, gdyż stabilizuje system polityczny skłaniając bliskie sobie partie do konsolidacji[21] (siłę, z jaką obciążenie metody Jeffersona-d'Hondta będzie wpływać na ostateczny wynik wyborów, można regulować zwiększając lub zmniejszając wielkość okręgów).

W praktyce wyborczej w Polsce po 1989 roku stosowano zarówno metodę największych reszt z kwotą prostą (wybory do Sejmu w 1991 roku), modyfikowaną metodę Sainte-Laguë (wybory samorządowe 1990, 1994, do Sejmu

[21] Należy tutaj zwrócić uwagę, że zawarcie koalicji nawet przez zbliżone partie zawsze grozi im utratą części wyborców; bez „premii" ze strony systemu wyborczego koalicje są zwykle subaddytywne w sensie liczby uzyskanych głosów. Stąd też stosowanie metod teoretycznie nieobciążonych może prowadzić do utrzymywania się lub wręcz pogłębiania rozdrobnienia sceny politycznej (por. Kamiński 1998; Cox 1997; Taagepera i Shugart 1989).

– lista krajowa – w 1991), jak i metodę Jeffersona-d'Hondta (wybory do Sejmu 1993, 1997, samorządowe 1998). Co prawda zmiany stosowanych metod podziału mandatów wiązały się ze zmianami wielkości okręgów wyborczych, niewątpliwie jednak tak, jak stosowanie metody największych reszt w roku 1991 miało zasadniczy wpływ na rozczłonkowanie Sejmu w latach 1991–93, tak stosowanie metody d'Hondta od roku 1993 wpłynęło na konsolidację systemu partyjnego i znacznie większą stabilność rządów; przykłady konsekwencji stosowania w tamtych wyborach innych metod podziału mandatów podane były na początku niniejszego tekstu. Z drugiej strony kwestia zasad przydzielania mandatów okręgom wyborczym właściwie w ogóle nie znalazła dotychczas odbicia w polskim prawodawstwie. Sprawa ta regulowana jest albo bezpośrednio w ustawie (wszystkie dotychczasowe ordynacje do Sejmu), albo regulacja ogranicza się do wskazania, że liczba mandatów powinna odpowiadać „normie reprezentacji" – co, jak pokazuje chociażby ten artykuł, jest dyrektywą całkowicie niejednoznaczną.

Decyzja o wyborze określonego systemu wyborczego może mieć zasadnicze znaczenie dla przyszłego układu sił w państwie i na lata zadecydować o kierunku jego dalszego rozwoju. Wybór konkretnej metody oznaczać będzie zawsze rezygnację z pewnych pożądanych właściwości (np. trzymania się kwoty) na rzecz innych (np. niewrażliwości na „paradoks Alabamy"). Niestety, rzadko kiedy można zastosować rozwiązanie opisane przez Balinskiego i Younga (1982: 40), wykorzystywane w latach 1881 i 1891 w USA: kiedy w Kongresie powstawał spór o to, czy podział mandatów w Izbie Reprezentantów przeprowadzić metodą Webstera, czy też Hamiltona (największych reszt), ostatecznie zmieniano liczbę miejsc w Izbie na taką, przy której obie metody prowadziły do identycznego podziału.

Literatura

Balinski, Michel L. i H. Peyton Young. 1982. *Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote.* Nev Haven and London: Yale University Press.

Birkhoff, Garrett. 1976. *House Monotone Apportionment Schemes.* Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 73: 684–686.

Cox, Gary. 1997. *Making Votes Count. Strategic Coordination in the World Electoral Systems.* Cambridge: Cambridge University Press.

Gebethner, Stanisław. 1992. *Sejm rozczłonkowany: wytwór ordynacji wyborczej czy polaryzacji na polskiej scenie politycznej.* W: *Wybory'91 a polska scena polityczna.* Stanisław Gebethner i Jacek Raciborski (red.). Warszawa: Wydawnictwo UW „Polska w Europie".

Golański, Robert i Krzysztof Kasprzyk. 1998. *O wpływie stosowanej metody przeliczania głosów na mandaty na wynik wyborów*. „Przegląd Statystyczny" R. 45, zeszyt 3: 435–448.

Golański, Robert i Krzysztof Kasprzyk. 1999. *Wybór publiczny*. W: Honorata Sosnowska (red.), *Grupowe podejmowanie decyzji*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar, s. 9–61.

Hill, Joseph. 1911. *Letter to William C. Houston, Chairman, House Committee on the Census, datet April 25*. W: U.S., Congress, House, *Apportionment of Representatives, House Report 12*, 62nd Congress, 1st session, April 25, 1911.

Hołubiec, Jerzy W. i Jacek W. Mercik. 1992. *Techniki i tajniki głosowania*. Warszawa: Omnitech.

Huntington, Edward V. 1928. *The Apportionment of Representatives in Congress*. „Transaction of the American Mathematical Society" 30: 85–110.

Huntington, Edward V. 1921. *The Mathematical Theory of the Apportionment of Representatives*. Preceedings of the National Academy of Sciences, USA, 7: 123–127.

Kamiński, Marek M. 1994. *Twierdzenie Arrowa: przykład zastosowania metody aksjomatycznej w naukach społecznych*. „Studia Socjologiczne" 3–4: 73–92.

Kamiński, Marek M. 1997. *Jak komuniści mogli zachować władzę w 1989 roku. Rzecz o (nie)kontrolowanej odwilży, sondażach opinii publicznej i ordynacji wyborczej*. „Studia Socjologiczne" 2: 5–34.

Kamiński, Marek M. 1998. *Strategiczne konsekwencje łączenia się i dzielenia: analiza konsolidacji polskiego systemu partyjnego pomiędzy 1993 a 1997 rokiem*. „Studia Socjologiczne" 3: 19–47.

Kamiński, Marek M. i Jarosław Gryz. 1997. *Koalicje wyborcze: Lekcja 1993 roku*. W: Jacek Wasilewski (red.). *Zbiorowi aktorzy polskiej polityki*. Warszawa: ISP PAN.

Ordynacja wyborcza do Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej. 1991. Dziennik Ustaw RP nr 59/1991.

Ordynacja wyborcza do Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej. 1993. Dziennik Ustaw RP nr 45/1993.

Newland, Robert. 1982. *Comparative Electoral Systems*. London: The Arthur McDougall Found.

Raciborski, Jacek. 1997. *Polskie wybory. Zachowania polityczne społeczeństwa polskiego 1989–95*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar.

Steinhaus, Hugo. 1956. *Kalejdoskop matematyczny*. Warszawa: Państwowy Zakład Wydawnictw Szkolnych.

Taagepera, Rein i Shugart Matthew S. 1989. *Seats and Votes. The Effects & Determinants of Electoral Systems*. New Haven and London: Yale University Press.

Tideman, Nicolaus. 1995. *The Single Transferable Vote*. „Journal of Economic Perspective" 1: 27–38.

Wilcox, Walter. F. 1916. *The Apportionment of Representatives.* „The American Economic Review" 6, no. 1, Supplement: 3–16.
Young, H. Peyton. 1994. *Equity in Theory and Practice.* Princeton: Princeton University Press.
Żukowski, Arkadiusz. 1997. *Systemy wyborcze.* Olsztyn: Wyższa Szkoła Pedagogiczna.

Rational Apportionment of Seats Under the Proportional Representation Electoral Law

Summary

Proportional representation electoral law is used in many democratic systems, including Poland. For the final outcome of elections, the criteria of seat apportionment may be equally significant as the actual distribution of votes. The article discusses the most important methods of allocation of seats (largest remainders method, Jefferson-d'Hondt method, Webster-Saint-Laguë and other) and their theoretical underpinnings, classification, and properties. The author discusses in detail several criteria of rationality of apportionment and the utility of particular methods for small and big parties.

Key concepts: largest remainders method, divisor methods, quota.